МЕХАНИКА

Лектор: Жақыпов Әлібек Серікұлы
Тел: +7 705 660 69 63
e-mail: Alibek.Zhakypov@kaznu.edu.kz

7 лекция
«Колебательные процессы»

Цель лекции: сформировать у студентов целостное представление о гармонических колебаниях, их математическом описании, энергетике и суперпозиции, а также о примерах классических осцилляторов (маятники, пружинный осциллятор).

Задачи лекции:

1. Дать определение колебательных процессов, периода и частоты колебаний, ввести понятие классического осциллятора.
2. Получить уравнение гармонического осциллятора, ввести амплитуду, фазу и собственную круговую частоту и связать их с параметрами системы.
3. Рассмотреть изменения потенциальной, кинетической и полной энергии при гармонических колебаниях.
4. Показать векторное и комплексное представление гармонических колебаний и принцип сложения колебаний, в том числе явление биений и фигуры Лиссажу.
5. Рассмотреть примеры гармонических осцилляторов математический, пружинный и физический маятники, вывести их период малых колебаний и ввести понятие приведенной длины.

Основные понятия и термины:

Гармоническое колебание – периодическое колебание, при котором смещение точки от положения равновесия изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

Собственная круговая частота осциллятора – Величина $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ для пружинного осциллятора, характеризующая число полных колебаний за 2π секунд.

Математический маятник — материальная точка на невесомой нерастяжимой нити длины l, совершающая малые колебания в поле тяжести.

Физический маятник – любое твердое тело, колеблющееся вокруг горизонтальной оси под действием силы тяжести; его период выражается через момент инерции, массу и расстояние до центра масс и вводится понятие приведенной длины, эквивалентной длине математического маятника с тем же периодом.

Биения – результирующее колебание, возникающее при сложении двух гармонических колебаний близких частот, когда амплитуда медленно изменяется во времени по периодическому закону. Наблюдаются чередующиеся «усиления» и «ослабления» колебаний вследствие интерференции, что описывается суммой двух синусоид с близкими частотами.

План лекции

1 Понятие колебаний. Примеры колебательных процессов в природе и технике. Период и частота колебаний, классический осциллятор.

2 Гармонический осциллятор. Пружинный маятник, закон Гука, вывод дифференциального уравнения колебаний, решение в виде гармонического закона, амплитуда, фаза, собственная круговая частота, период.

3 Потенциальная и кинетическая энергия при гармонических колебаниях. Выражения для W_p, W_k, их взаимное преобразование и постоянство полной энергии системы.

4 Векторная и комплексная формы представления гармонических колебаний. Вращающийся вектор, экспоненциальная запись по формуле Эйлера.

5 Сложение гармонических колебаний одинакового и перпендикулярного направлений. Результирующее колебание, биения, фигуры Лиссажу.

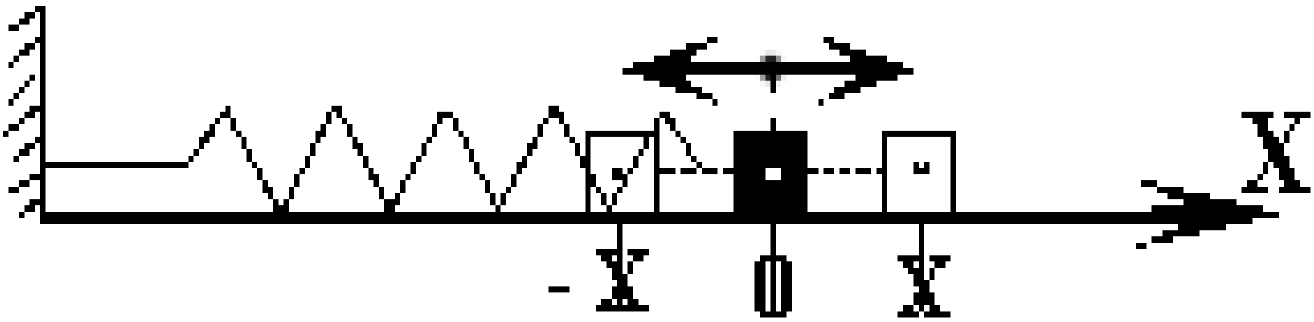
6 Гармонические осцилляторы. Математический маятник, пружинный маятник, физический маятник. Вывод периодов малых колебаний, понятие приведенной длины и центра качаний.

«Колебательные процессы»

В природе и технике часто происходят процессы, повторяющиеся во времени. Такие процессы называются колебаниями.

Качания маятника часов, волны на воде, переменный электрический ток, свет, звук, и т.д. являются примерами колебаний различных физических величин. Все эти процессы качественно отличаются друг от друга, но оказывается, что количественные закономерности (т.е. математические выражения) этих процессов имеют много общего. Именно это обстоятельство придает учению о колебаниях его важное значение. Изучая на этих двух лекциях механические колебания, мы получим также знания - в других областях, например, из области электромагнитных колебаний, радиотехники, оптики, и др.

Гармонические колебания



Изучим простейшую колебательную систему – тело массы *m*, прикрепленное к пружине и скользящее без трения по горизонтальному столу (рис. 1).

Рассмотрим движение этого грузика под действием *однократно* приложенной силы. Отклонение обозначим через *x*, и предположим, что имеем дело с абсолютно упругой пружиной. В этом случае пружина действует на груз с упругой силой *F*, пропорциональной смещению x и направленной в сторону обратную смещению, т. е.

$$F = - kx \tag{7.1}$$

где *k* - коэффициент пропорциональности, называемый также жесткостью пружины. Знак *"минус"* означает, что сила упругости противодействует смещению.

В физике встречаются силы иного происхождения, чем упругие, которые обнаруживают такую же закономерность, т. е. оказываются равными

$$-kx,$$

где *k* – постоянная положительная величина.

Силы такого вида, независимо от их природы, принято называть **квазиупругими**. Под действием этой однократно приложенной силы грузик начнет совершать колебания.

Механическая система, совершающая колебания около положения равновесия, называется классическим осциллятором.

Промежуток времени, по истечению которого движение повторится, называется периодом колебания и обозначается

$$T, \quad [T] = c.$$

Частота колебаний равна числу полных колебаний за 1 с:

$$\nu = \frac{1}{T}. \tag{7.2}$$

Частота измеряется в Гц.

1 Герц - это одно колебание за 1 с.

В технике частоты измеряются также в
килогерцах (1 кГц = 10^3 Гц),
мегагерцах (1 Мгц = 10^6 Гц),
гигагерцах (1 ГГц = 10^9 Гц).

Выведем уравнение колебаний гармонического осциллятора.
Напишем 2-й закон Ньютона:

$$F = ma,$$

где $F = -kx$,
а ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}.$$

В итоге получаем

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{7.3}$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{7.4}$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (7.5)$$

Уравнение (1) является обыкновенным линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решением будет:

$$x = A\,cos(\omega_0 t + \theta) \text{ или } x = A\,sin(\omega_0 t + \theta) \qquad (7.6)$$

где A - амплитуда колебаний, т. е. наибольшее отклонение колеблющегося грузика от положения равновесия; оно задается начальными условиями при однократном приложении силы.

Поскольку значения как cos так и sin через 2π радиан повторяются, то можно найти связь между периодом

T_0 и ω_0: $\omega_0(t+T)+\theta = \omega_0 t + \theta + 2\pi$,

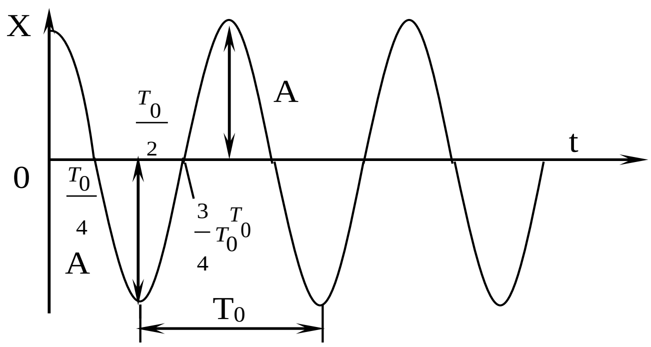


Рис. 2

откуда $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi\nu$ (7.7)

ω_0 - называется собственной круговой частотой. Она равна числу полных колебаний за 2π секунд. Для вращательного движения круговая частота и величина угловой скорости $\omega = d\phi/dt$ совпадают.

Выражение $\omega_0 t + \theta$ в скобках (3) называют фазой колебания. Она определяет смещение в данный момент времени t; θ – начальная фаза. Она характеризует смещение в начальный момент времени t=0 и определяется начальными условиями, как и амплитуда A.

Пусть $\theta = 0$, тогда

$$x = A\,s(\omega t)\,cos\frac{2\pi}{T_0}cos(2\pi\nu_0 t). \qquad (7.8)$$

График этого уравнения приведен на рис. 2. Из (2) и (4) следует, что период колебания

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k} \qquad (7.9)$$

не зависит от амплитуды колебаний A.

Скорость $V = dx/dt = \dot{x} = -A\omega_0\,sin(\omega_0 t + \theta)$ (7.10)

пропорциональна амплитуде и круговой частоте, и отличается по фазе от смещения (3) на $\pi/2$.
Максимальная скорость

$$v_{м} = A\omega_0. \quad (7.11)$$

Ускорение

$$a = dV/dt = d^2x/dt^2 = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \, cos(\omega_0 t + \theta) = -\omega_0^2 x \quad (7.12)$$

пропорционально A и ω_0^2, и по направлению совпадает с направлением силы $\vec{F}$, а по фазе отличается от скорости (6) на $\pi/2$, и от смещения (3) – на π. Максимальное ускорение

$$a_{м} = A\omega_0^2 \quad (7.13)$$

Простейшее периодическое колебание, при котором смещение изменяется со временем по закону cos *или* sin *называется гармоническим колебанием.*

Как следует из (5) и (6) скорость и ускорение колеблющегося груза изменяется со временем также по гармоническому закону, т. е. по закону sin и cos.

Потенциальная и кинетическая энергии

Установим изменение потенциальной и кинетической энергий колеблющейся системы. Известно, что потенциальная энергия упруго деформированного тела равна

$$W_n = kx^2/2 \quad (7.14)$$

где k - коэффициент упругости, x - смещение; откуда для потенциальной энергии колебаний находим

$$W_n = (kA^2/2) \, cos^2 (\omega_0 t + \theta) \quad (7.15)$$

Кинетическая энергия

$$W_k = mV^2/2 \quad (7.16)$$

что, согласно (7.16), в нашем случае будет

$$W_k = \left(m\omega_0^2 A^2/2\right)\sin^2\left(\omega_0 t + \theta\right) = \left(kA^2/2\right)\sin^2\left(\omega_0 t + \theta\right) \quad (7.17)$$

Анализ (7.17) показывает, что когда одна из энергий W_k или W_n увеличивается, то другая уменьшается. Полная же энергия

$$E=W_n+W_k=kA^2/2 \tag{7.18}$$

остается величиной постоянной и для пружинного маятника, (см. рис. 1), она определяется работой, совершенной внешней силой по сжатию или растяжению пружины. Итак, мы рассмотрели свободные или собственные колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе, после того, как она была выведена из положения равновесия.

Но в реальных условиях всегда на механические системы действуют силы трения из-за чего свободные колебания переходят в затухающие, которые будут рассмотрены в параграфе 8.

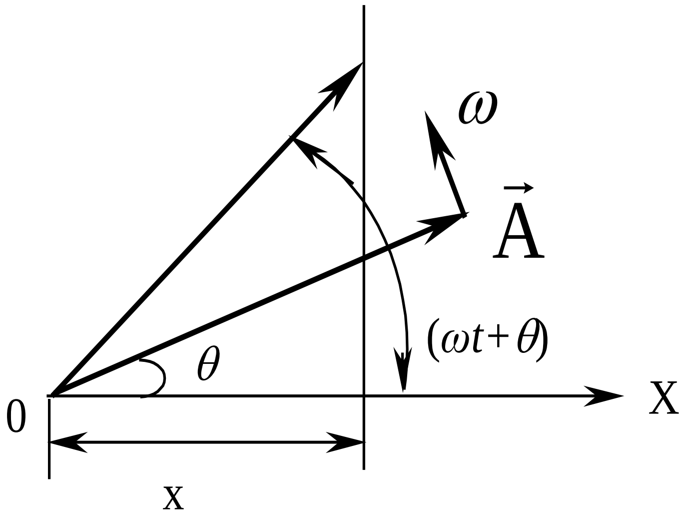
Векторная диаграмма гармонического колебания

Гармоническое колебание

$$x = A\,cos(\omega_0 t+\theta) \tag{7.19}$$

можно представить в виде проекции вектора $\vec{A}$\`, вращающегося против хода часовой стрелки с угловой скоростью, равной круговой частоте ω. Из рис. 3 следует, что проекция вектора $\vec{A}$ на направление *OX* будет

$$x = A\,cos(\omega_0 t+\theta) \tag{7.20}$$



Комплексная форма представления колебаний

Согласно формуле Эйлера для комплексных чисел

$e^{i\alpha} = cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha$, где $i=\sqrt{-1}$.

Поэтому уравнение гармонического колебания (3) можно записать в экспоненциальной форме:

$$\tilde{x} = A\,exp[i(\omega t+\theta)] \tag{7.21}$$

Вещественная часть $\mathrm{Re}(\tilde{x})$ представляет собой смещение x при гармоническом колебании

$$x = Re(\tilde{x}) = A\cos(\omega t + \theta) \tag{7.22}$$

Обычно обозначение $Re(\tilde{x})$ опускают и пишут так

$$x = Ae^{i(\omega t+\theta)} = A\,exp[i(\omega t + \theta)] \tag{7.23}$$

Сложение одинаково направленных колебаний

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинаковой частоты, смещения которых

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \theta_1) \text{ и } x_2 = A_2\cos(\omega t + \theta_2) \tag{7.24}$$

Используем векторную диаграмму, рис. 4; откуда следует, что

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \theta) \text{ , где}$$

$$A^2 = A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + A_2^2$$

$$\theta = arctg(A_1\sin\theta_1 + A_2\sin\theta_2)/(A_1\cos\theta_1 + A_2\cos\theta_2).$$

Пусть $x_1 = A\cos\omega_1 t, x_2 = A\cos\omega_2 t$, тогда

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t \tag{7.25}$$

т.е. результирующее колебание не будет гармоническим. Если колебания мало отличаются по частоте, например,

$$\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega, \omega_{21} = \omega_0 + \Delta\omega \tag{7.26}$$

то результирующее колебание

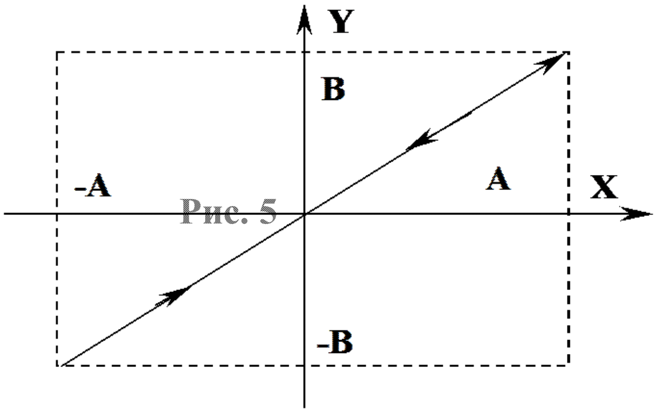
$$x = 2A\cos\Delta\,\omega t\cos\omega_0 t \tag{7.27}$$

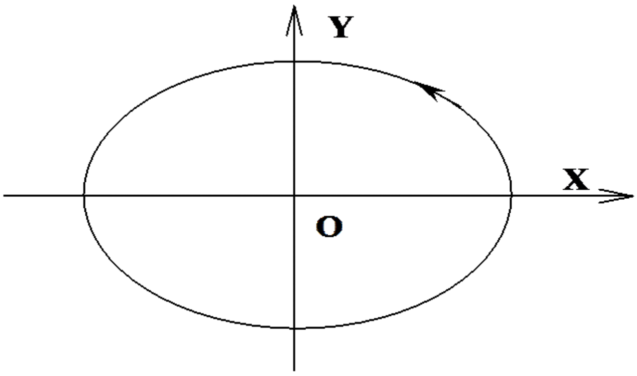
можно рассматривать как почти гармоническое колебание с частотой ω_0и медленно меняющейся амплитудой

$$B = 2A\cos\Delta\,\omega t \tag{7.28}$$

Такие периодические изменения амплитуды называются биениями.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

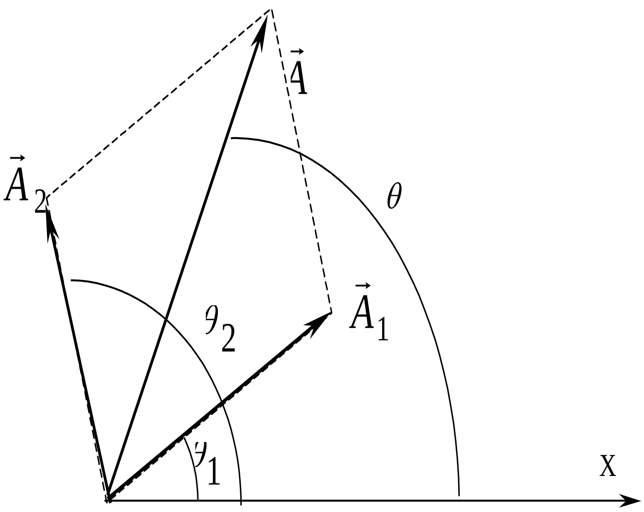




Пусть $x = A\,cos\,\omega\,t$ и $y = B\,cos\,\omega\,t$, тогда траекторией будет прямая линия, (рис. 5): $y = (B/A)x$.

При $x = A\,cos\,\omega\,t$ и $y = B\,sin\,\omega\,t$, траекторией будет эллипс, (рис. 6): $(x^2/A^2)+(y^2/B^2)=1$.

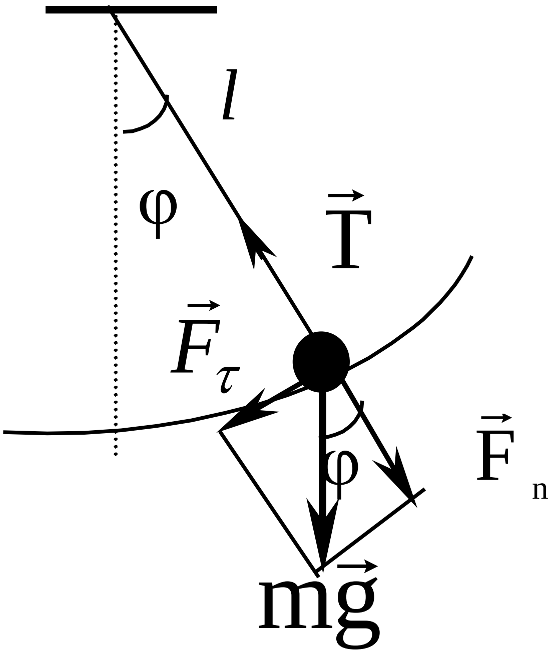
При разных частотах складывающихся колебаний результирующие траектории будут иметь более сложный вид.



Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются фигурами Лиссажу.

Гармонические осцилляторы
Математический маятник

Это материальная точка, подвешенная на невесомой, нерастяжимой нити.



Хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити, рис.7. Тангенциальное ускорение *a,* возникает под действием тангенциальной силы

$F_\tau = -mg\,sin\,\phi.$

Для малых ϕ можно положить

$sin\,\phi \approx \phi$ и $F_\tau \approx -mg\phi.$

Рис.7

С другой стороны тангенциальное ускорение связанос угловым

$\varepsilon = d^2\phi/dt^2$ соотношением:

$a_\tau = \varepsilon l = l(d^2\phi/dt^2) = l\ddot{\phi}.$

Из второго закона Ньютона следует, что

$ma_\tau = F_\tau,$ или $ml\ddot{\phi} = -mg\phi.$

Деля правую и левую части этого уравнения на l, получим:

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0 \qquad (7.29)$$

где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Решением его для малых φ будет:

$$\phi = \phi_m\,cos(\omega_0 t + \theta) = \phi_m\,cos[(2\pi/T_0)t + \theta] \qquad (7.30)$$

Где

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g} \qquad (7.31)$$

Таким образом, период колебаний математического маятника T_0, не зависит от его массы и амплитуды колебаний. Измерения T_0 дают возможность с большой точностью определять g , что позволяет проводить гравитометрическую разведку и определять форму фигуры планеты.

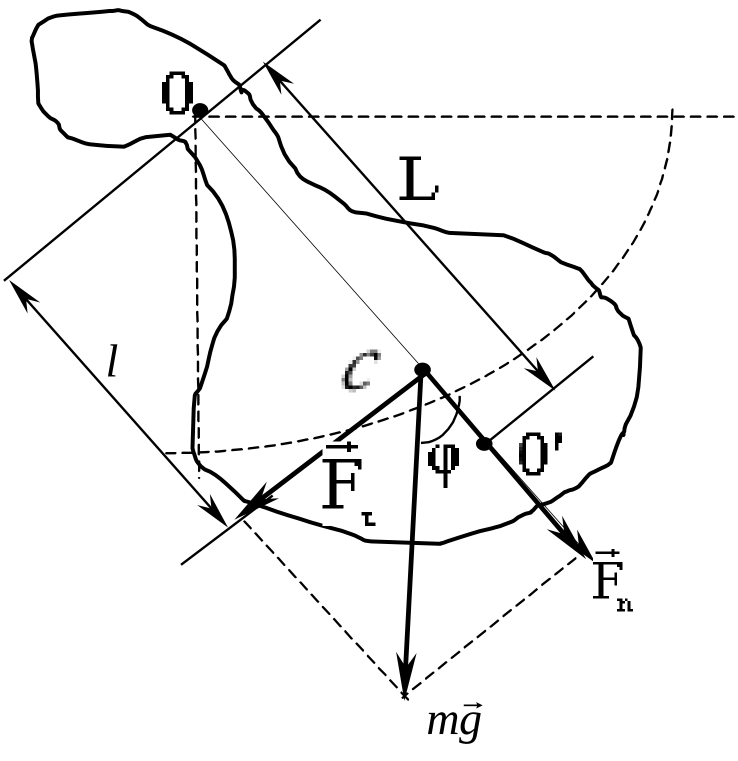
Математический маятник сыграл большую роль в открытии закона сохранения энергии и в создании общей теории относительности, основным положением которой является равенство массы гравитационной и инертной.

Пружинный маятник

Это груз массой m , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий колебания около положения равновесия, рис. 1. Он был рассмотрен в параграфе 1. Для него

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \text{ и } T_0 = 2\pi\sqrt{m/k} \tag{7.32}$$

Физический маятник



Это твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс C тела. На маятник, отклоненный на малый угол φ действует момент силы

$$M = -mgl\sin\phi \approx -mgl\phi,$$

который сообщает угловое ускорение

$$\varepsilon = d^2\phi/dt^2 = MJ,$$

где J - момент инерции тела, относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно рисунку.

С учетом этого получается дифференциальное уравнение

$$J\, d^2\phi/dt^2 = -mgl\phi \tag{7.33}$$

Разделив правую и левую части последнего уравнения на момент инерции тела J, найдем:

$$\ddot{\phi} + \omega_0\phi = 0,$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{mgl/J}. \qquad (7.34)$$

Решением его будет

$$\phi = \phi_m \cos(\omega_0 t + \theta).$$

Период колебания

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{J/mgl} = 2\pi\sqrt{L/g} \qquad (7.35)$$

где $L = J/ml$ - приведенная длина физического маятника;

L - это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебания данного физического маятника.

Точка O' , расположенная на расстоянии L от точки O (рис. 8), через которую проходит ось подвеса физического маятника, называется его центром качаний. Периоды колебаний относительно точек O и O' совпадают.

Контрольные вопросы

1. Запиши уравнение гармонического колебания и объясни физический смысл амплитуды, фазы и собственной круговой частоты.
2. Как изменяются потенциальная, кинетическая и полная энергия пружинного маятника во времени при гармонических колебаниях
3. В чем состоит геометрическая (векторная) и комплексная интерпретация гармонического колебания какие преимущества дает такое представление
4. Что такое биения при сложении двух колебаний близких частот как изменяется амплитуда результирующего колебания во времени
5. Сравни математический и физический маятники какие параметры определяют период их малых колебаний и что называют приведенной длиной физического маятника

Литература

1. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Высш. шк., 1990.- 478 с.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики М.: Высш. шк., 1989.- 608 с.
3. Савельев И.В. Общий курс физики. Т1. Механика. Молекулярная физика. М.: Наука, 1988.- 416 с.
4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики.- М.: Наука, 1985.
5. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т.1,2,3.-М.: Наука, 1974,1980
6. Сивухин Д.В. Курс общей Физики. – М.: Наука, 1986. Т. 1.